

Estimation des distributions a posteriori à l'aide de méthodes numériques

Samuel Soubeyrand
BioSP – INRA Paca

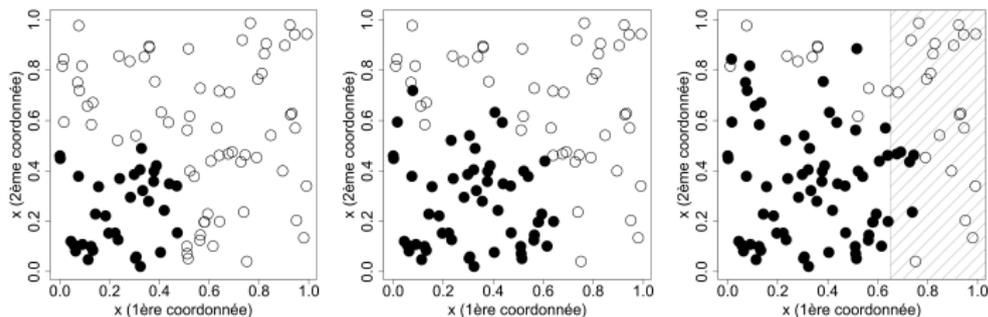
Ecole Chercheur BioBayes 2019
18 – 22 mars, Pornic



©Henri Cartier-Bresson

Fil rouge : exemple en épidémiologie spatiale

- ▶ Jeu de données simulé selon un modèle de dynamique épidémique
- ▶ Ingrédients du modèle :
 - ▶ Ensemble d'hôtes dont les positions sont fixes et connues
 - ▶ Propagation simulée selon une succession de phases de dissémination



- ▶ Ex. d'application : propagation d'un pathogène au sein d'une population de plantes
- ▶ **Objectif : estimer les paramètres du modèle**

Pourquoi utiliser des données simulées ?

- ▶ Vérifier l'efficacité des algorithmes d'estimation proposés en tentant de retrouver les valeurs des paramètres qui ont servi à générer les données
- ▶ C'est un exercice classique pour valider une procédure statistique d'estimation

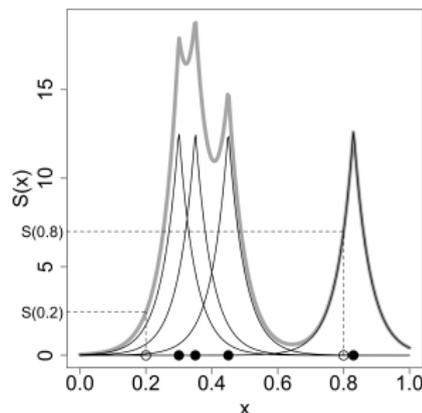
Formulation schématique du modèle (détail : chap. 5)

- ▶ $Y(i, t)$: état sanitaire de l'hôte i au temps t
 - ▶ $Y(i, t) = 0$ si l'hôte i est sain au temps t
 - ▶ $Y(i, t) = 1$ s'il est infecté au temps t
- ▶ L'évolution des $Y(i, t)$ est régie par un modèle markovien à deux états (0 et 1), à temps discret et dont les probabilités de transitions sont:

$$\begin{cases} P_t(i : 1 \rightarrow 1) = 1 \\ P_t(i : 1 \rightarrow 0) = 0 \\ P_t(i : 0 \rightarrow 1) = 1 - e^{-S(i,t)} \\ P_t(i : 0 \rightarrow 0) = e^{-S(i,t)}, \end{cases}$$

- ▶ Le potentiel d'infection $S(i, t)$ dépend de deux paramètres :
 - ▶ Le paramètre d'infectiosité θ_1
 - ▶ Le paramètre de dissémination θ_2
- ▶ Code R de simulation du modèle :

<http://maiage.jouy.inra.fr/?q=fr/bbb.accueil.html>

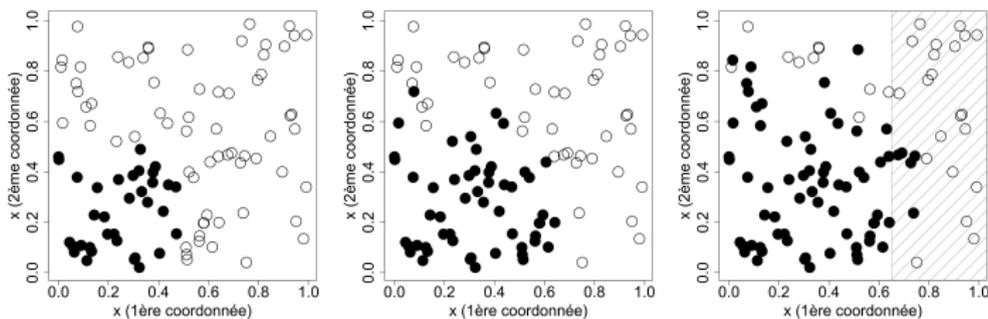


Données

- ▶ Simulation de la dynamique avec $\theta_1 = 0.2$ et $\theta_2 = 0.05$

- ▶ Échantillonnage complet

Objectif : évaluer la distribution *a posteriori* $[\theta \mid y_1, y_2, y_3]$



- ▶ Échantillonnage incomplet temporellement

Objectif : $[\theta, Y_2 \mid y_1, y_3]$

- ▶ Échantillonnage incomplet spatialement et temporellement

Objectif : $[\theta, Y_3^{\text{latent}} \mid y_1, y_2, y_3^{\text{obs}}]$

→ Voir chapitre 5

Lois *a priori*

- ▶ Un expert nous a donné la loi *a priori* suivante pour les paramètres:
a priori, θ_1 et θ_2 sont indépendants et suivent des distributions exponentielles de moyenne deux:

$$\theta_1 \sim \text{Exponentielle}(2)$$

$$\theta_2 \sim \text{Exponentielle}(2)$$

Pourquoi utiliser des méthodes numériques ?

- ▶ Ce que l'on cherche à quantifier en bayésien:
 - ▶ la loi a posteriori

$$f(\theta | Y) = \frac{f(Y | \theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} f(Y | \alpha)\pi(\alpha)d\alpha}$$

- ▶ et ses caractéristiques: moments a posteriori, maximum a posteriori, quantiles a posteriori, intervalles de crédibilité...
- ▶ Exemple: Nombre de succès sur n essais indépendants
 - ▶ modèle binomial: $Y | \theta \sim \text{Binomiale}(n, \theta)$
 - ▶ prior beta: $\theta \sim \text{Beta}(a, b)$
 - ▶ posterior¹: $\theta | Y \sim \text{Beta}(a + Y, b - n + Y)$

¹ Détail du calcul:

$$\begin{aligned} f(\theta | Y) &= \frac{C_n^Y \theta^Y (1 - \theta)^{n-Y} \frac{\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}}{B(a,b)}}{\int_0^1 C_n^Y \alpha^Y (1 - \alpha)^{n-Y} \frac{\alpha^{a-1}(1-\alpha)^{b-1}}{B(a,b)} d\alpha} \\ &= \frac{\theta^{(a+Y)-1} (1 - \theta)^{(b+n-Y)-1}}{B(a + Y, b + n - Y)} \end{aligned}$$

Pourquoi utiliser des méthodes numériques ?

- ▶ Ce que l'on cherche à quantifier en bayésien:
 - ▶ la loi a posteriori

$$f(\theta | Y) = \frac{f(Y | \theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} f(Y | \alpha)\pi(\alpha)d\alpha}$$

- ▶ et ses caractéristiques: moments a posteriori, maximum a posteriori, quantiles a posteriori, intervalles de crédibilité...
- ▶ **Mais la loi a posteriori peut s'avérer difficilement calculable**
 - ▶ Modèle avec nombreux paramètres et variables latentes:

$$f(\theta_1, \dots, \theta_K | Y) = \frac{f(Y | \theta_1, \dots, \theta_K)\pi(\theta_1, \dots, \theta_K)}{\int_{\Theta_1} \dots \int_{\Theta_K} f(Y | \theta_1, \dots, \theta_K)\pi(\alpha_1, \dots, \alpha_K)d\alpha_1 \dots d\alpha_K}$$

- ▶ Les intégrales multiples (grande dimension) rendent difficile le calcul de la posterior jointe $f(\theta_1, \dots, \theta_K | Y)$, des posteriors marginales $f(\theta_k | Y)$, des moments a posteriori $E(\theta_i^q | Y)$...

Pourquoi utiliser des méthodes numériques ?

- ▶ Ce que l'on cherche à quantifier en bayésien:

- ▶ la loi a posteriori

$$f(\theta | Y) = \frac{f(Y | \theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} f(Y | \alpha)\pi(\alpha)d\alpha}$$

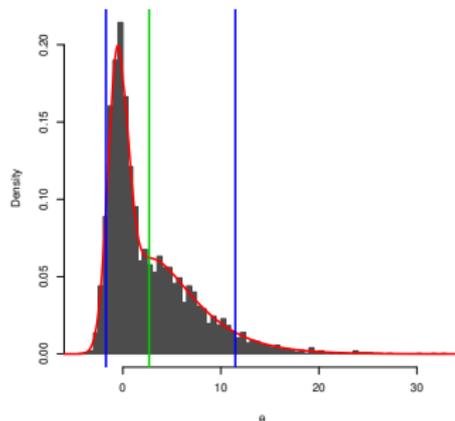
- ▶ et ses caractéristiques: moments a posteriori, maximum a posteriori, quantiles a posteriori, intervalles de crédibilité...

- ▶ **Mais la loi a posteriori peut s'avérer difficilement calculable**

- ▶ Ex. fil rouge : les probabilités d'infection $1 - e^{-S(i,t)}$ varient en fonction de l'hôte i et des états sanitaires précédents de tous les hôtes
- ▶ Ces dépendances spatiotemporelles empêchent la calcul analytique des intégrales intervenant dans la loi a posteriori et de *ses produits dérivés*

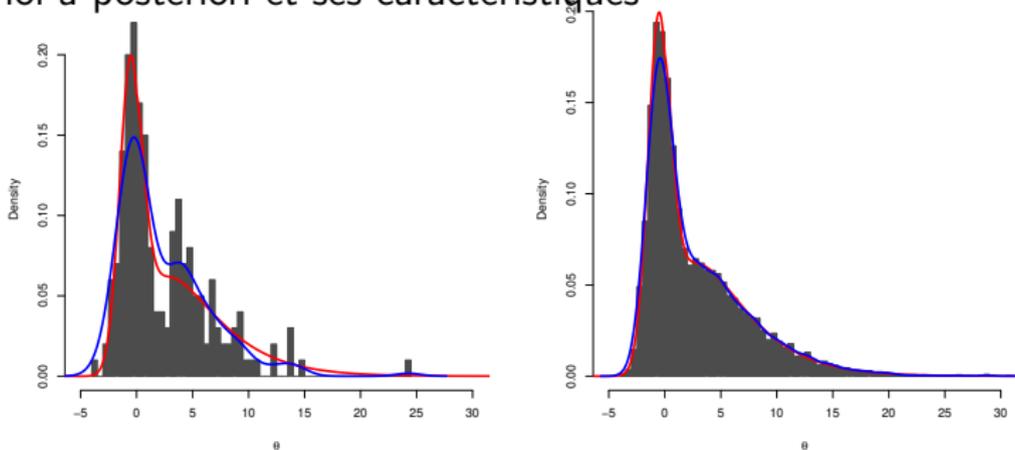
Des méthodes numériques pour contourner le problème

- ▶ Ce que peuvent les méthodes numériques :
 - ▶ générer un échantillon issu de la loi a posteriori
 - ▶ sans passer par le calcul d'intégrales multiples
- ▶ A quoi sert cet échantillon?
 - ▶ connaître intimement la loi a posteriori
 - ▶ estimer la densité a posteriori
 - ▶ estimer les moments a posteriori
ex: $E(\theta | Y) \approx \frac{1}{I} \sum_{i=1}^I \theta^{(i)}$
 - ▶ estimer des intervalles de crédibilité
 - ▶ ...



Des méthodes numériques pour contourner le problème

- ▶ Ce que peuvent les méthodes numériques :
 - ▶ générer un échantillon issu de la loi a posteriori
 - ▶ sans passer par le calcul d'intégrales multiples
- ▶ Générer un grand échantillon pour correctement approcher la loi a posteriori et ses caractéristiques



Echantillons de taille 200 (histo gauche) et 10000 (histo droite)
Densités a posteriori vraies (rouge) et estimées (bleu)

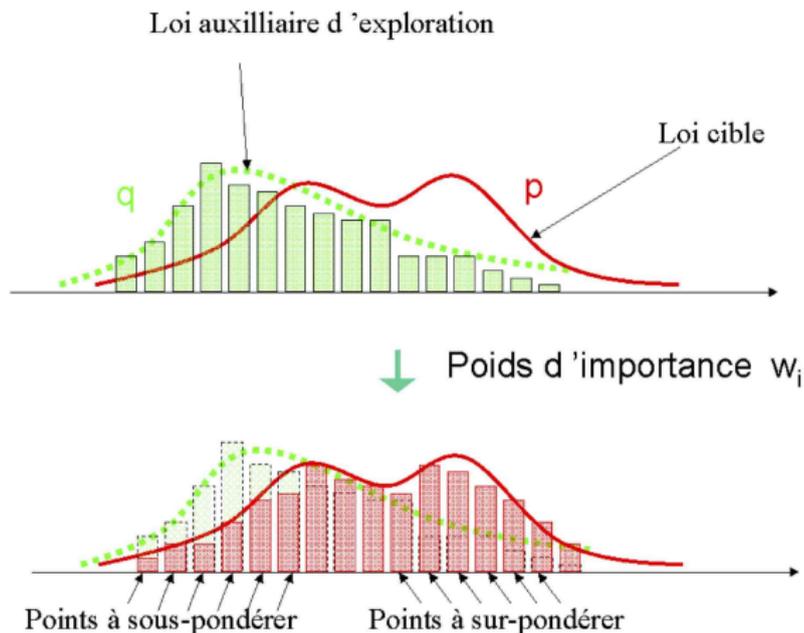
Plan de la présentation

Introductions à quelques méthodes numériques permettant de générer un échantillon issu d'une loi a posteriori

- ▶ Méthode de ré-échantillonnage
- ▶ Algorithme de Monte-Carlo par Chaînes de Markov (MCMC)
 - ▶ avec échantillonneur de Gibbs
 - ▶ avec échantillonneur de Metropolis-Hastings
 - ▶ avec échantillonneur Hamiltonien
- ▶ Méthode particulière
- ▶ Calcul bayésien approché (ABC)

Ré-échantillonnage (sampling importance resampling)

Méthode numérique basé sur l'échantillonnage d'importance:



Extrait de Parent et Bernier (2007)

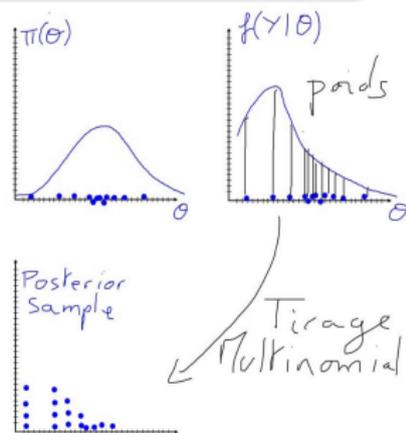
Pour nous, la loi cible est la loi a posteriori

Ré-échantillonnage (sampling importance resampling)

Algorithme

1. Tirer un I -échantillon $\{\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(I)}\}$ dans la prior π
2. Attribuer à chaque $\theta^{(i)}$ le poids $w_i = \frac{f(Y|\theta^{(i)})}{\sum_{j=1}^I f(Y|\theta^{(j)})}$
3. Tirer avec remise (tirage multinomial) J valeurs dans le I -échantillon $\{\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(I)}\}$ avec les probabilités w_1, \dots, w_I

Illustration des contributions de la prior et de la vraisemblance dans la méthode de ré-échantillonnage:



Ré-échantillonnage (sampling importance resampling)

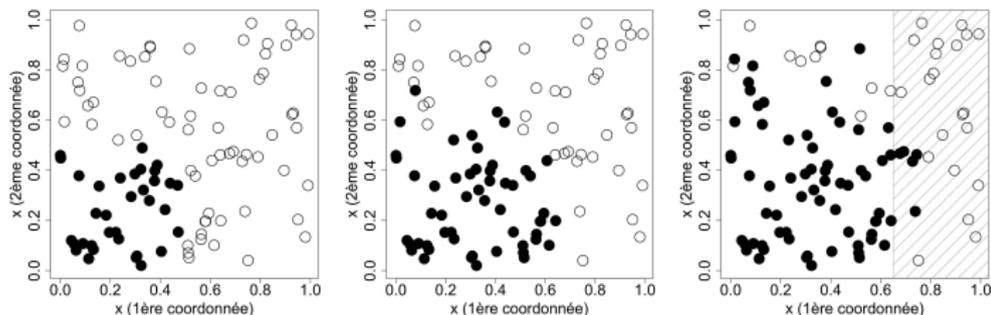
Algorithme

1. Tirer un I -échantillon $\{\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(I)}\}$ dans la prior π
2. Attribuer à chaque $\theta^{(i)}$ le poids $w_i = \frac{f(Y|\theta^{(i)})}{\sum_{j=1}^I f(Y|\theta^{(j)})}$
3. Tirer avec remise (tirage multinomial) J valeurs dans le I -échantillon $\{\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(I)}\}$ avec les probabilités w_1, \dots, w_I

Généralisation de l'algorithme (voir chapitre 5) :

- ▶ En tirant l' I -échantillon dans une loi auxiliaire g et en corrigeant les poids w_i en conséquence
- ▶ Idéalement, il faut faire en sorte que g *ressemble* à la loi cible

Application du ré-échantillonnage au modèle épidémique



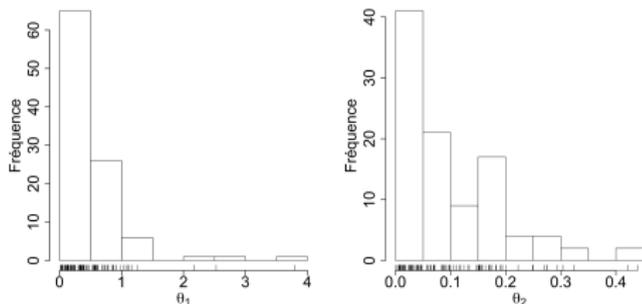
Valeurs vraies des paramètres :

- ▶ Paramètre d'infectiosité : $\theta_1 = 0.2$
- ▶ Paramètre de dissémination : $\theta_2 = 0.05$

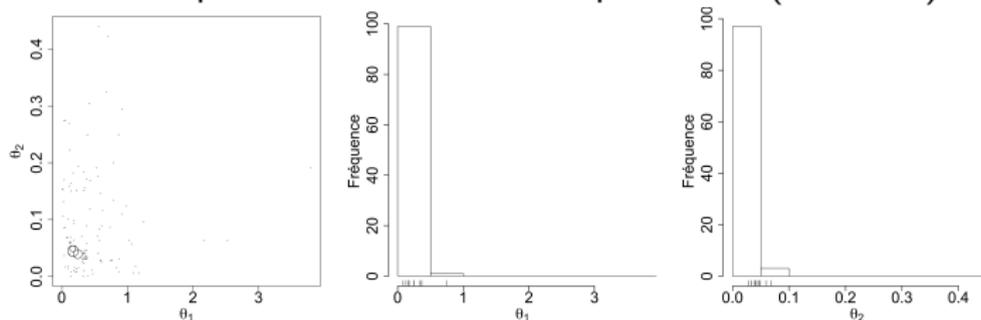
Application du ré-échantillonnage au modèle épidémique

Etapes de l'algorithme SIR :

- ▶ Tirage dans la loi auxiliaire² ($I = 100$) :



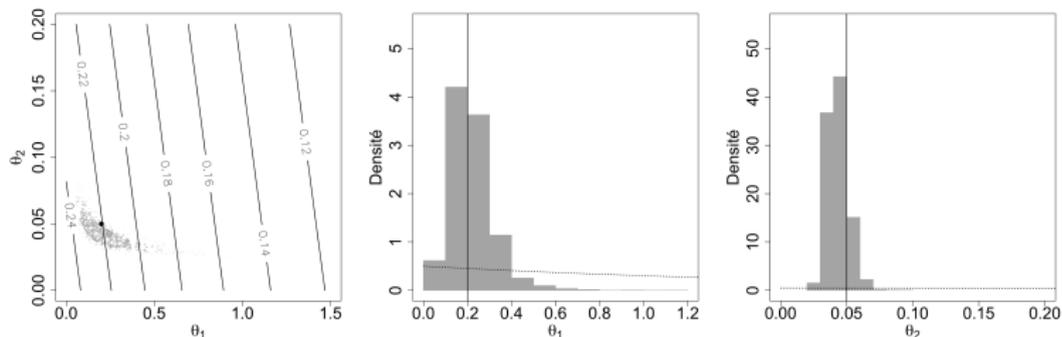
- ▶ Calcul des poids et échantillons a posteriori ($J = 100$) :



²Loi auxiliaire : $\text{Expontielle}(0.5) \times \text{Expontielle}(0.1)$ pour avoir un taux d'acceptation raisonnable sur 100 simulations

Application du ré-échantillonnage au modèle épidémique

- Distributions a posteriori obtenues par la méthode de ré-échantillonnage appliquée *grandeur nature*

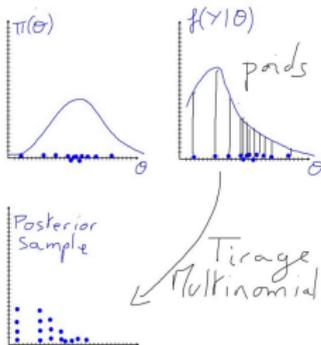


$I = 10^5$ jeux de paramètres simulés sous la loi auxiliaire
 $\text{Expontielle}(2) \times \text{Expontielle}(2)$

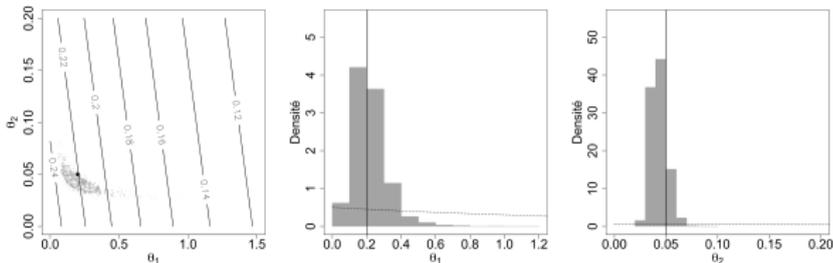
$J = 10^4$ jeux de paramètres tirés selon les poids d'importance

Limites du ré-échantillonnage

- ▶ Doublons dans l'échantillon a posteriori

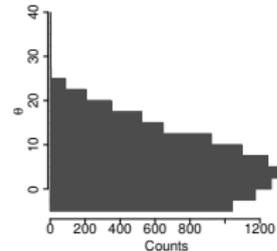
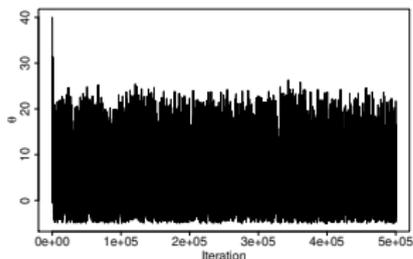
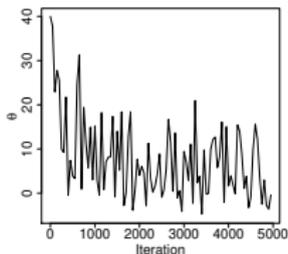


- ▶ Il se peut qu'une très grande proportion de vecteurs de paramètres θ générés ne soient pas retenus dans l'échantillon a posteriori ("rendement" faible)



MCMC

- ▶ Méthodes de Monte Carlo par Chaînes de Markov
- ▶ Algorithmes utilisés dans WinBugs, Jags, Stan...
- ▶ Algorithmes séquentiels: une séquence de réalisations dépendantes (i.e. une chaîne) de θ est générée
- ▶ Exploration ciblée de l'espace des paramètres (et des variables latentes)
- ▶ Qu'est-ce qu'une chaîne ?



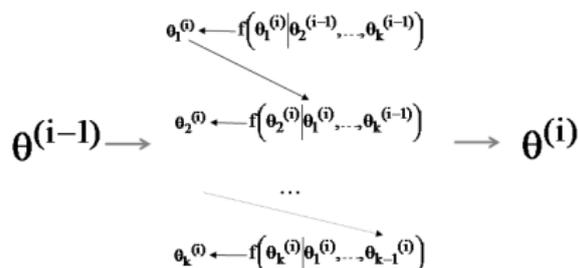
MCMC: Echantillonneur de Gibbs

Algorithme

0. Initialisation: donner des valeurs initiales aux K composantes de θ : $\theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_K^{(0)})$

i . A l'itération $i \in \{1, \dots, I\}$:

- ▶ Générer $\theta_1^{(i)}$ selon la loi $f(\theta_1 | Y, \theta_2^{(i-1)}, \dots, \theta_K^{(i-1)})$
- ▶ Générer $\theta_2^{(i)}$ selon la loi $f(\theta_2 | Y, \theta_1^{(i)}, \theta_3^{(i-1)}, \dots, \theta_K^{(i-1)})$
- ▶ Générer $\theta_3^{(i)}$ selon la loi $f(\theta_3 | Y, \theta_1^{(i)}, \theta_2^{(i)}, \theta_4^{(i-1)}, \dots, \theta_K^{(i-1)})$
- ▶ ...
- ▶ Générer $\theta_K^{(i)}$ selon la loi $f(\theta_K | Y, \theta_1^{(i)}, \dots, \theta_{K-1}^{(i)})$



MCMC: Algorithme de Metropolis-Hastings

- ▶ Généralisation du MCMC–Gibbs
- ▶ Une loi de proposition arbitraire remplace la loi conditionnelle
- ▶ La mise à jour des paramètres n'est pas systématique (étape d'acceptation-rejet)
- ▶ La loi de proposition intervient dans la proba de mise à jour

MCMC: Algorithme de Metropolis-Hastings

Algorithme

0. Initialisation: donner des valeurs initiales aux K composantes de θ : $\theta^{(0)} = (\theta_1^{(0)}, \dots, \theta_K^{(0)})$

i, k . A l'itération $i \in \{1, \dots, I\}$, pour chaque k :

- ▶ Générer θ_k^{cand} selon la loi de proposition $g(\theta_k | \theta_k^{(i-1)})$
- ▶ Mettre à jour le paramètre ($\theta_k^{(i)} = \theta_k^{cand}$) avec la probabilité^a:

$$\begin{aligned} \min & \left[1, \frac{\text{Posterior}(\theta_k^{cand})g(\theta_k^{(i-1)} | \theta_k^{cand})}{\text{Posterior}(\theta_k^{(i-1)})g(\theta_k^{cand} | \theta_k^{(i-1)})} \right] \\ & = \min \left[1, \frac{(\text{Vraisemblance} \times \text{Prior})(\theta_k^{cand})g(\theta_k^{(i-1)} | \theta_k^{cand})}{(\text{Vraisemblance} \times \text{Prior})(\theta_k^{(i-1)})g(\theta_k^{cand} | \theta_k^{(i-1)})} \right] \end{aligned}$$

- ▶ Ne pas mettre à jour ($\theta_k^{(i)} = \theta_k^{(i-1)}$) sinon

^aExpression de la probabilité de mise à jour:

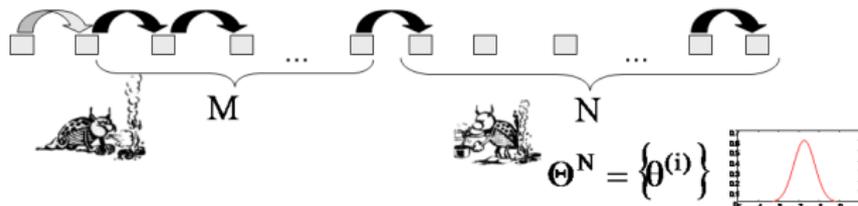
$$\min \left[1, \frac{f(Y | \theta_{1:k-1}^{(i)}, \theta_k^{cand}, \theta_{k+1:K}^{(i-1)})\pi(\theta_{1:k-1}^{(i)}, \theta_k^{cand}, \theta_{k+1:K}^{(i-1)})g(\theta_k^{(i-1)} | \theta_k^{cand})}{f(Y | \theta_{1:k-1}^{(i)}, \theta_k^{(i-1)}, \theta_{k+1:K}^{(i-1)})\pi(\theta_{1:k-1}^{(i)}, \theta_k^{(i-1)}, \theta_{k+1:K}^{(i-1)})g(\theta_k^{cand} | \theta_k^{(i-1)})} \right]$$

MCMC: Algorithme de Metropolis-Hastings

- ▶ Connaissance nécessaire de la loi cible (la loi a posteriori) qu'à une constante près

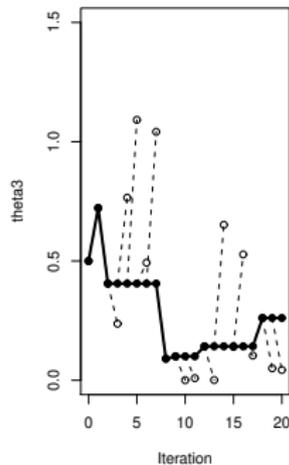
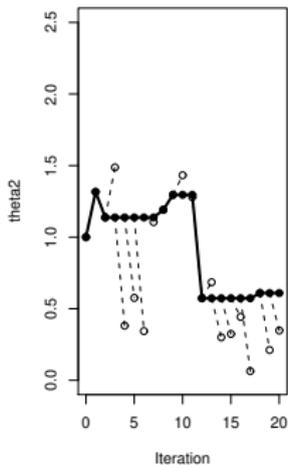
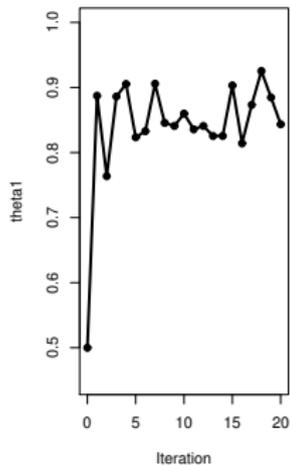
$$f(\theta_1, \dots, \theta_K \mid Y) \propto f(Y \mid \theta_1, \dots, \theta_K) \pi(\theta_1, \dots, \theta_K)$$

- ▶ Mise à jour par bloc
- ▶ Algorithmes hybrides combinant Gibbs et M-H
- ▶ Comme dans le MCMC-Gibbs, période de chauffe (burn-in) et régime de croisière (stationnaire)



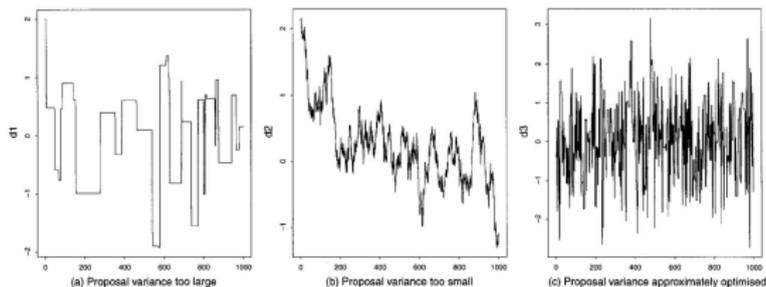
- ▶ Contrairement au MCMC-Gibbs, choix des lois de proposition (paramètres de réglages, tuning)
- ▶ Question de la convergence de la chaîne vers son régime de croisière (vrai aussi pour le MCMC-Gibbs)

Algorithmes hybrides combinant Gibbs et M-H



Choix des lois de proposition g

- ▶ La rapidité de convergence de la chaîne dépend du choix des lois de proposition (formes et valeurs des paramètres)



Extrait de Roberts and Rosenthal (2001)

- ▶ Taux de mise à jour à viser (par essai-erreur) dans les cas standard : 25%

Choix des lois de proposition g

- ▶ Gibbs

$$g(\theta_k | \theta^{(i-1)}, \text{data}) = f(\theta_k | \theta_{-k}^{(i-1)}, \text{data})$$

- ▶ Metropolis-Hastings

- ▶ Tirage indépendant, e.g. (ϕ : densité de la loi normale)

$$g(\theta) = \phi(\theta | \mu, \Omega)$$

- ▶ Marche aléatoire homogène, e.g.

$$g(\theta | \theta^{(i-1)}) = \phi(\theta | \theta^{(i-1)}, \Omega)$$

- ▶ Marche aléatoire adaptative, e.g.

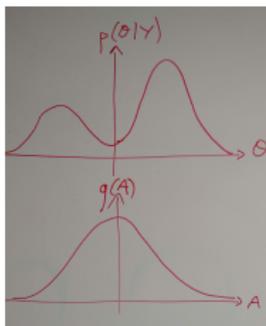
$$g(\theta | \theta^{(i-1)}) = \phi(\theta | \theta^{(i-1)}, \hat{\Omega}_k)$$

- ▶ Metropolis adjusted Langevin algorithm (MALA)

$$g(\theta | \theta^{(i-1)}) = \phi(\theta | \theta^{(i-1)} + \frac{\epsilon^2}{2} \nabla_{\theta} \mathcal{L}(\theta^{(i-1)}), \epsilon^2 \mathbf{I})$$

- ▶ Echantillonneur Hamiltonien
(HMC – Hamiltonian Monte Carlo)

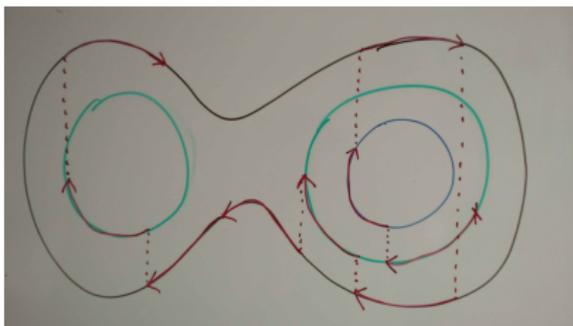
MCMC: Echantillonneur Hamiltonien (cas univarié)



Equations d'Hamilton:

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial A} \\ \frac{dA}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \theta} \end{cases}$$

→ Energie H préservée



Energie (i.e. l'Hamiltonien) : $H(\theta, A) = -\log\{p(\theta | Y)q(A)\}$

Probabilité d'acceptation (qui en théorie devrait être égale à 1 !):

$$\begin{aligned} \alpha &= \min \left\{ 1, \frac{p(\theta^* | Y)q(A^*)}{p(\theta^{(i-1)} | Y)q(A^{(i-1)})} \right\} \\ &= \min \left\{ 1, \exp\{H((\theta^{(i-1)}, A^{(i-1)})) \right. \\ &\quad \left. - H((\theta^*, A^*))\} \right\} \end{aligned}$$

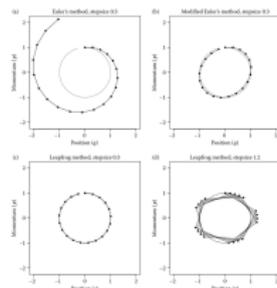
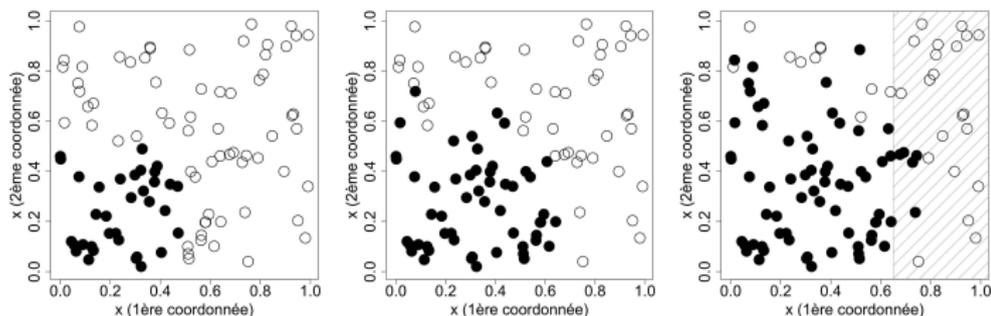


FIGURE 1.1 Results using three methods for approximating Hamiltonian dynamics, when $H(\theta, p) = p^2/2 + \theta^2/2$. The initial state is $(\theta, p) = (1, 1)$. The step size is $h = 0.2$ for (a), (b), and (c), and $h = 0.1$ for (d). Starting instead of the standard trajectory can allow for each method, along with the true trajectory (in gray).

Extrait de Neal (2011)

Application du MCMC au modèle épidémique



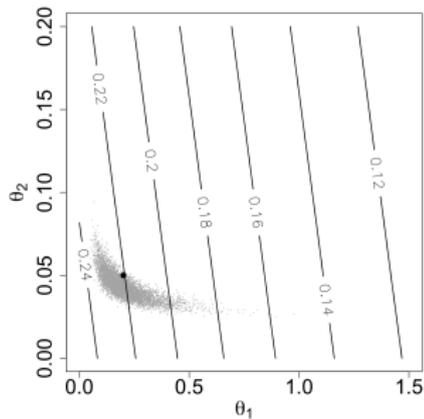
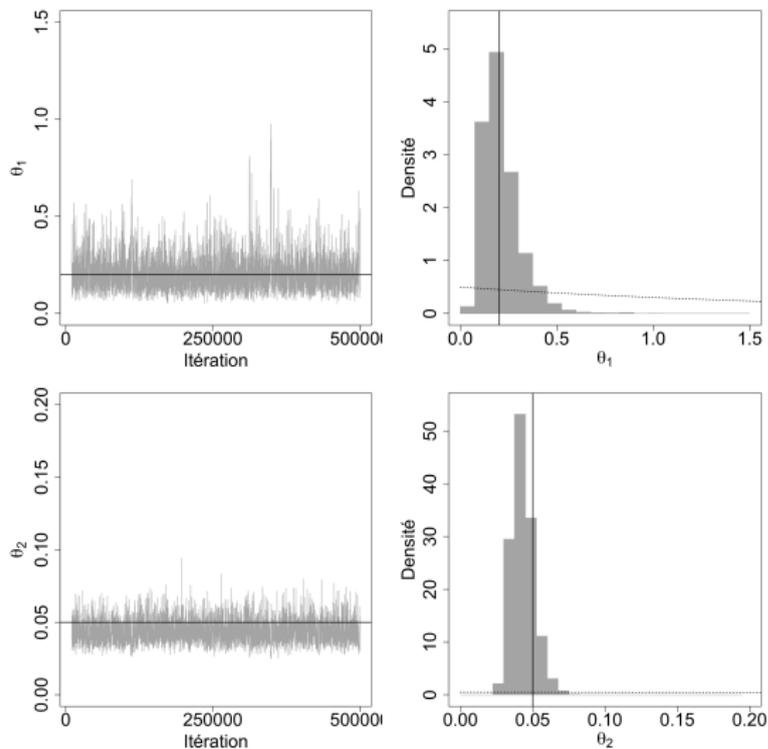
Valeurs vraies des paramètres :

- ▶ Paramètre d'infectiosité : $\theta_1 = 0.2$
- ▶ Paramètre de dissémination : $\theta_2 = 0.05$

Application du MCMC au modèle épidémique

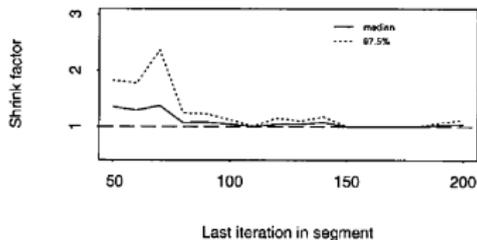
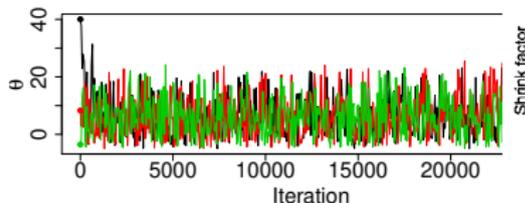
- ▶ MCMC avec échantillonneur de Metropolis-Hastings
- ▶ Mise à jour simultanée de θ_1 et θ_2 à chaque itération: lois gamma indépendantes centrées sur les valeurs courantes et d'écart-type 0.1
- ▶ 5×10^5 itérations
- ▶ 1000 premières itérations supprimées (phase transitoire)
- ▶ Seulement une réalisation sur 50 a été conservée par la suite pour évaluer la distribution *a posteriori*

Application du MCMC au modèle épidémique



Diagnostics de convergence des chaînes

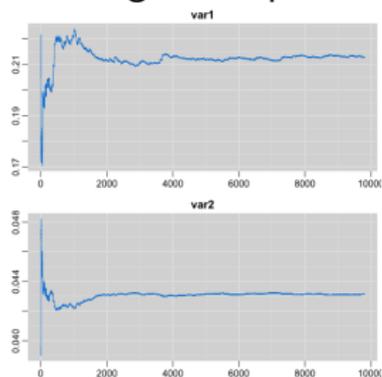
- ▶ Quelle convergence ?
 - ▶ Convergence vers la loi cible... difficile !
 - ▶ Convergence vers la stationarité
 - ▶ Convergence des moyennes empiriques
 - ▶ Convergence vers un échantillonnage i.i.d.
- ▶ Un exemple de diagnostic: la méthode de Gelman–Rubin qui est basée
 - ▶ sur plusieurs chaînes initialisées différemment
 - ▶ sur les variances inter-chaîne et intra-chaîne



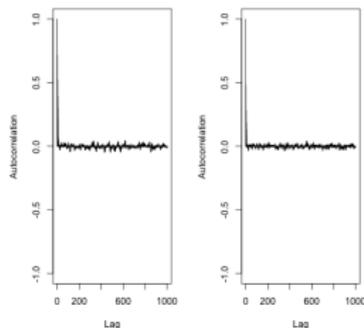
- ▶ Mais on peut procéder à toute une batterie d'analyses :
[Patrick Lam's slides](http://patricklam.org/) <http://patricklam.org/>

Application du MCMC au modèle épidémique (suite)

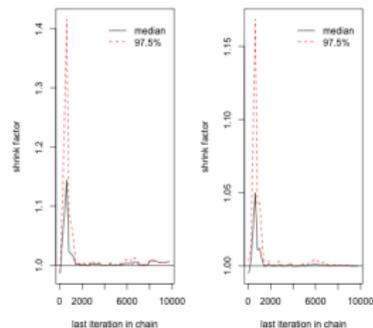
Running mean plots



Autocorrelation

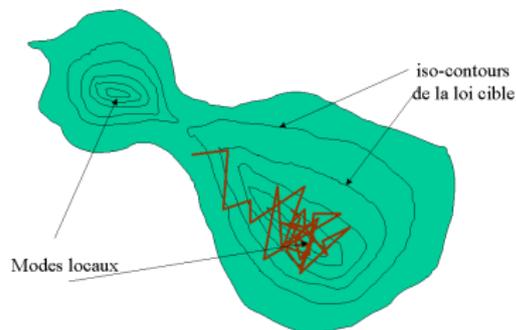


Gelman-Rubin



MCMC: Difficultés d'utilisation

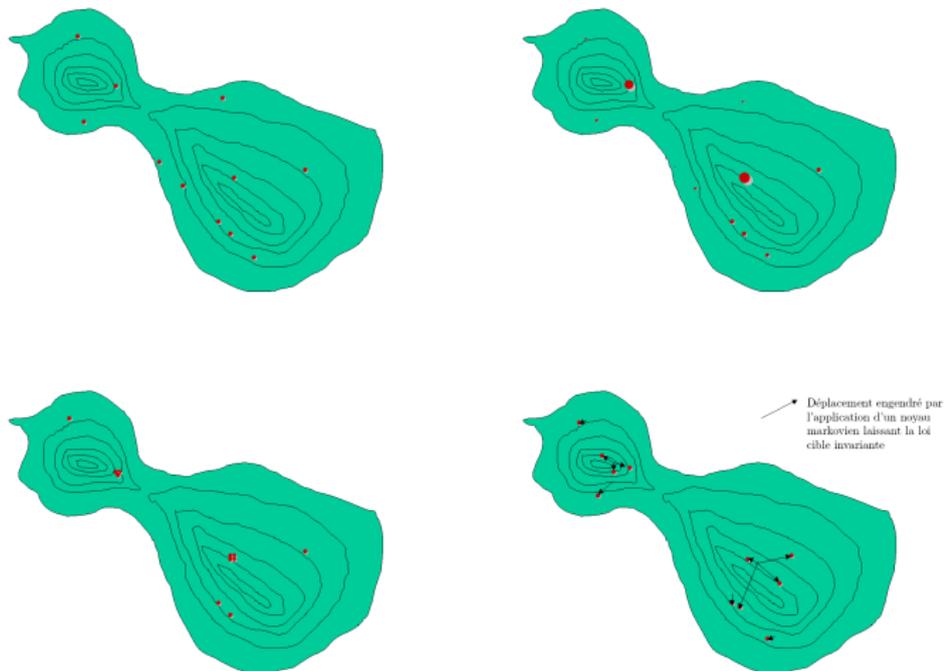
- ▶ Paramètres de réglage
 - ▶ longueur de la période de chauffe (Gibbs et M-H)
 - ▶ longueur de la chaîne (Gibbs et M-H)
 - ▶ sous-échantillonnage de la chaîne (Gibbs et M-H)
 - ▶ formes et paramètres des lois de propositions (M-H)
- ▶ Dimension élevée
- ▶ Difficulté d'explorer toute la loi a posteriori
 - ▶ Ex. des lois a posteriori multimodales avec faibles probas entre les modes
 - ▶ Problème de capture autour des modes locaux
 - ▶ Comment améliorer l'exploration?



Extrait de Parent & Bernier (2007)

Méthode particulière : Principe

Simuler N chaînes de Markov en parallèle, en éliminant celles loin du mode et en multipliant celles qui sont proches



ABC: Principe

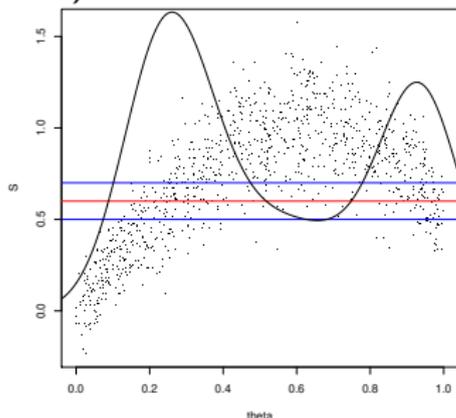
- ▶ Difficulté d'évaluer la distribution a posteriori

$$f(\theta_1, \dots, \theta_K | Y) = \frac{f(Y | \theta_1, \dots, \theta_K) \pi(\theta_1, \dots, \theta_K)}{\int_{\Theta_1} \dots \int_{\Theta_K} f(Y | \theta_1, \dots, \theta_K) \pi(\alpha_1, \dots, \alpha_K) d\alpha_1 \dots d\alpha_K}$$

- ▶ Ré-échantillonnage, MCMC Gibbs ou M-H, Méthode particulière: il suffit de pouvoir calculer
 - ▶ la vraisemblance $f(Y | \theta_1, \dots, \theta_K)$
 - ▶ les conditionnelles $f(\theta_k | Y, \theta_{-k})$
- ▶ **Mais si ces calculs ne sont pas possibles?**
(exemple des modèles de coalescence)

Avec le calcul bayésien approché (ABC): il suffit de pouvoir simuler Y sachant $\theta_1, \dots, \theta_K$

[Intro sur l'ABC](#)



Conclusions

- ▶ Les méthodes numériques ont rendu la statistique bayésienne opérationnelle
 - ▶ sur une plus large gamme de modèles
 - ▶ sur une plus large gamme de jeux de données
- ▶ On peut trouver des analogues de ces méthodes pour des inférences par optimisation, mais...
- ▶ Des logiciels / packages (WinBugs, Jags, Stan, abc...) permettent à l'analyste d'utiliser certaines méthodes numériques sans avoir à les programmer
- ▶ Ils ne peuvent toutefois pas être utilisés comme des boîtes noires passe-partout:
 - ▶ paramètres de réglage
 - ▶ diagnostics de convergence

Références

- ▶ Casella G. & George E. I. (1992). Explaining the Gibbs sampler. *The American Statistician* 46: 167–174.
- ▶ Chib S. & Greenberg E. (1995). Understanding the Metropolis-Hastings algorithm. *The American Statistician* 49: 327–335.
- ▶ Parent E. & Bernier J. (2007). *Le raisonnement bayésien – Modélisation et inférence*. Springer, Paris.
- ▶ Robert C. P. & Casella G. (1999). *Monte Carlo Statistical Methods*. Springer, New York.
- ▶ Roberts G. O. & Rosenthal J. S. (2001). Optimal Scaling for Various Metropolis-Hastings Algorithms. *Statistical Science* 16: 351–367.
- ▶ Marjoram P., Molitor J., Plagnol V. & Tavaré S. (2003). Markov chain Monte Carlo without likelihoods. *PNAS* 100: 26.
- ▶ Csilléry K., Blum M.G., Gaggiotti O.E. & François O. (2010). Approximate Bayesian computation (ABC) in practice. *Trends in ecology & evolution*, 25(7), pp.410-418.
- ▶ Collectif BIOBAYES (2015). *Initiation à la Statistique Bayésienne - Bases Théoriques et Applications en Alimentation, Environnement, Epidémiologie et Génétique*. Editions Ellipses.